Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Mohammedia

Département de mathématiques
Jeudi 29 Décembre 2016

Module M211 Algèbre BCG
Examen du Partiel 1 (Durée : 2h)

Nom et Prénom		N°

Exercice 1 (7pts.)

1. On considère le polynôme $S(X) = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 2$.
   (a) Vérifier que 1 est une racine du polynôme $S(X)$
   (b) Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit le polynôme $Q(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$. Sachant qu'il admet une racine réelle double, donner sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On considère la fraction rationnelle : $F = \dfrac{2X^3 - X^2 - 4X + 1}{X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1}$
   (a) Donner, dans $\mathbb{C}(X)$, la forme de la décomposition en éléments simples de F.
   (b) Déterminer toutes les constantes de cette décomposition.
   (c) En déduire la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2 (7pts.)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer, en fonction de b le déterminant de M; $det\ M$.
2. Pour quelles valeurs de b la matrice M est elle inversible?
3. On prend $b = 5$. Calculer dans ce cas M^{-1}.
4. En déduire la solution du système :

$$(S) : \begin{cases} 7x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ 5x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

QCM (5 pts.)

Cet exercice est un Q.C.M(Questions à choix multiples). Aucune justification n'est demandée. Il n'existe qu'une seule affirmation correcte. Présenter les résultats en complétant le tableau en bas de page. Chaque réponse convenable rapporte 1pt., une réponse erronée enlève 0,25pt. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. On rappelle qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective ssi

$$\forall x \in E, \forall y \in E \text{ on a } f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

Alors une application f n'est pas injective ssi :

A. $\exists x \in E, \exists y \in E$ tel que $f(x) \neq f(y)$ et $x = y$

B. $\exists x \in E, \exists y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$ et $x \neq y$

C. $\forall x \in E, \forall y \in E$ tel que $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

D. $\exists x \in E, \exists y \in E$ tel que $x \neq y$ et $f(x) \neq f(y)$

2. La négation de "Chaque matin Said arrive en retard et son ami ne l'attend pas". est :

A. Chaque matin Said arrive à l'heure et son ami l'attend.

B. Il y a un matin où Said arrive à l'heure et son ami l'attend

C. Il y a un matin où Said arrive à l'heure ou son ami l'attend

D. Chaque matin si Said n'arrive pas à l'heure son ami ne l'attend pas.

Soit $A(\theta)$ la matrice $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

3. On a $det(A(\theta)) =$

A. 1 B. -1 C. $\cos(2\theta)$ D. $\sin(2\theta)$.

4. $A(\theta)$ étant la matrice de la question précédente alors : $A^2(\theta) = A(\theta) \times A(\theta) =$

A. $A(\theta^2)$ B. $A(2\theta)$ C. $A(-\theta)$ D. $A^2(\theta^2)$.

5. La forme de la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{X^2}{X^2-1}$ est

A. $1 + \frac{1}{X^2-1}$ B. $\frac{aX^2+bX+c}{X^2-1}$

C. $\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$ D. $1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$

Question	1	2	3	4	5
affirmation correcte					

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Mohammedia

Département de mathématiques
Mercredi 11 Novembre 2015

Module M211 Algèbre BCG
Examen du Partiel 1 (Durée : 2h)

		N°
Nom et Prénom		

Exercice 1 (7pts.)

1. On considère le polynôme $Q(X) = X^5 - 5X^4 + 9X^3 - 9X^2 + 8X - 4$.
   (a) Vérifier que 1 et 2 sont deux racines de Q et que l'une d'entre elles est double.
   (b) Factoriser alors Q dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit F la fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$:
$$F(X) = \frac{2X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 5X + 7}{X^5 - 5X^4 + 9X^3 - 9X^2 + 8X - 4}$$
   (a) Donner la forme de la décomposition en élément simple de F dans $\mathbb{R}(X)$
   (b) Déterminer toutes les constantes de cette décomposition.

Exercice 2 (7pts.)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer, en fonction de a le déterminant de M; *det* M.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice M est elle inversible?
3. On prend $a = 1$. Calculer dans ce cas M^{-1}.
4. En déduire la solution du système :
$$(S) : \begin{cases} x - y + z = 4 \\ -x - 2y + z = -4 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

QCM (5 pts.)

Cet exercice est un Q.C.M(Questions à choix multiples). Aucune justification n'est demandée. Il n'existe qu'une seule affirmation correcte. Présenter les résultats en complétant le tableau en bas de page. Chaque réponse convenable rapporte 1pt., une réponse erronée enlève 0,5pt. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. La négation de **"Dans chaque groupe de T.D. il y a au moins un étudiant absent"** est :

   A. Dans chaque groupe de T.D. tous les étudiants sont présents.

   B. Il existe un groupe de T.D où tous les étudiants sont absents.

   C. Il existe un groupe de T.D où tous les étudiants sont présents.

   D. Dans chaque groupe de T.D tous les étudiants sont absents

2. On rappelle qu'une fonction est croissante sur un intervalle I ssi :

$$\forall a, b \in I \text{ on a } a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$$

   Alors une fonction qui n'est pas croissante vérifie :

   A. $\forall a, b \in I$ on a $a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$

   B. $\exists a, b \in I$ tels que $a > b \Longrightarrow f(a) > f(b)$

   C. $\exists a, b \in I$ tels que $a \leq b$ et $f(a) > f(b)$

   D. $\forall a, b \in I$ on a $f(a) > f(b) \Longrightarrow a > b$

3. le nombre complexe $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^7$ est égal à :

   A. $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Si $P(X) = (X - i)(X - 1)^2(X + 2)$. Alors on a

   A. P est irréductible *B.* $P \in \mathbb{R}[X]$ *C.* $P \notin \mathbb{R}[X]$ *D.* $deg(P) = 3$

5. Si Δ est le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}$. Alors :

   A. $\Delta = (1-a)^2(1+a+a^2)(-1+a-a^2)$ *B.* $\Delta = (1-a)^2(1+a+a^2)^2$

   C. $\Delta = -(1-a)^2(1+a+a^2)^2$ *D.* $\Delta = (1-a)^2(1+a+a^2)(1-a+a^2)$

Question	1	2	3	4	5
affirmation correcte					

FST

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE MOHAMMEDIA
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Examen final: Algèbre

L'utilisation de calculatrice est autorisée.
Durée : 02h00. Barème: 20/20.
Mardi, 02/01/2018

Nom:	
Prénom:	
N° d'examen:	Groupe:

Responsable: D. KARIM

Exercice 1

Donner la négation mathématique des propositions suivantes:

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \alpha \Longrightarrow |x^2| < \varepsilon$.

$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x| < \alpha$ et $|x^2| \geq \varepsilon$.

2. Dans toutes les écuries, il y a au moins un cheval blanc.

Il y a une écuries dont tous les chevaux ne sont pas blanc.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^6 = -1$. Calculer z^9

$(z^3)^2 = -1 \iff z^3 = i$ ou $z^3 = -i$

$\Rightarrow (z^3)^3 = -i$ ou $(z^3)^3 = i$

$\Rightarrow z^9 = -i$ ou $z^9 = i$

Donc $z^9 = \pm i$

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ alors on a:

A. M est inversible B. $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ C. M est trois fois la matrice identité D. $M^2 = 9M$ E. Autre réponse.

5. Calculer le déteminant $D = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}$

Exercice 2

On considère le polynôme $Q(X) = X^6 - 9X^5 + 29X^4 - 43X^3 + 50X^2 - 84X + 72$.

1. Vérifier que le polynôme Q admet deux racines réelles doubles.

2. Factoriser alors Q dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ la fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ avec : $P(X) = X^3 - 4X^2 + 4X - 3$. Vérifier qu'une racine double de $Q(X)$ est aussi racine de $P(X)$. **Simplifier alors la fraction rationnelle.**

4. Donner, dans $\mathbb{R}(X)$, la forme de la décomposition en éléments simples de F.

5. Déterminer toutes les constantes de cette décomposition.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ a & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer, en fonction de a le déterminant de A, $det(A)$.

2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est elle inversible?

3. En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système suivant . $(S)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$