Examen

Faculté des Sciences et Techniques - Mohammadia

BCG – Contrôle du module d'analyse M222

Jeudi 8 janvier 2015 - durée 2h

Exercice 1 : Soit la suite récurrente donnée par $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n}$ et $u_0 = 1$.

a) Si la suite u_n est convergente, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?
b) Soit $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$. Montrer que cette suite est géométrique et donner sa limite
c) En déduire la limite de la suite u_n

Exercice 2 : Soit $(x) = \frac{x^2}{\cos(x)-1}$

a) Donner les points où la fonction f n'est pas définie.
b) La fonction f admet elle un prolongement par continuité en 0 ? en les autres points où elle n'est pas définie ? (justifier la réponse)

Exercice 3 : calculer

$$a) \quad \lim_0 \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3} \qquad b) \quad \lim_0 \frac{\sin(x^3) - x^3}{x^9}$$

Exercice 4 : Calculer la dérivée première des fonctions :

$$f(x) = tg(\arcsin(x)) \;\; ; \quad g(x) = \log(x - tg(x))$$

$$h(x) = \sqrt{\sin(x)\cos(x)}$$

Exercice 5 : Calculer les primitives suivantes :

a) $P(\frac{1}{\cos(x)})$ b) $P(e^x \sin(x))$

Exercice 6 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'(t) - 2ty(t) = \frac{e^{t^2}}{(t-1)^3}$$

$$y''(t) + y(t) = \cos(t)$$

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2014 - 2015
BCG - Module M222: Analyse
Examen
03/06/15

Exercice 1 :

Soit la suite numérique $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $v_0 = 3$ qui vérifie
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{5}{2} v_n$

1. Calculer v_1, v_2, v_3
2. Donner v_n en fonction de n

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $u_0 = \frac{1}{4}$ qui vérifie $u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{4+u_n}$

3. Calculer u_1, u_2, u_3

Soit la suite numérique $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $w_n = \frac{2+u_n}{1-u_n}$.

4. Calculer w_0, w_1, w_2, w_3
5. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n
6. En déduire que $w_n = v_n$ pour tout $n \geqslant 0$
7. Montrer que $u_n = \frac{v_n - 2}{v_n + 1}$
8. En déduire le terme général de u_n
9. En déduire la limite de la suite u_n

Exercice 2 :

Calculer les primitives suivantes :

1. $A = \int \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$
2. $B = \int arcsin(x) dx$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + 2xy = 4x$
2. $y' + ycotg(x) = 5e^{cos(x)}$ avec la condition initiale $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $y_0 = -4$
3. $y'' - 5y' + 4y = 3 - 2x$

39

Université Hassan II - Casablanca, F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques, Année 2015 - 2016
BCG - Module M222: Analyse
Examen (partiel 2)

Q1 : Que vaut $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$?
Q2 : Soit $f(x)=\frac{(x+2)ln(x)}{x^2-4}$, quel est le domaine de définition de f ? Que vaut $\lim_{x\to 2} f(x)$?
Q3 : Soit $f(x)=xln(x)+\frac{x^2+4x}{x+1}$. Quelle est la fonction dérivée de f ?
Q4 : Quelle est la dérivée de $f(x)=sin(\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}$?
Q5 : Soit $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$, quel est le DL d'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x)$?
Q6 : Que valent $\int_1^e 2xln(x)dx$ et $\int_{-1}^{1}\frac{5x}{(x+5)(x-5)}dx$?
Q7 : Quelle est la primitive de $\int\frac{dx}{cos(x)}dx$? (prendre $t=tan(\frac{x}{2})$)
Q8 : Quelles sont les solutions de l'équation différentielle : $x^2y'(x)+x(x-2)y(x)=x^4(1+x)$?

Problème : Modélisation de la croissance de la partie aérienne du Tournesol

On s'intéresse à la croissance en hauteur de la partie aérienne du Tournesol. De l'apparition des premières feuilles, au stade précédant la formation du capitule ("la fleur"). Cette croissance peut être modélisée par l'équation différentielle suivante, où $h(t)$ représente la hauteur en cm et t le temps en jours :

$$\frac{dh(t)}{dt}=\frac{0.1}{255}h(t)(255-h(t)). \tag{1}$$

Pour la résoudre, nous allons utiliser le changement de variable $h(t)=\frac{1}{y(t)}$, on remarque que $\frac{dh(t)}{dt}=-\frac{1}{y^2(t)}\frac{dy(t)}{dt}$.
Q9 : Montrer que l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{dy(t)}{dt}+0.1y(t)=\frac{0.1}{255}. \tag{2}$$

Q10 : Trouver $y_0(t)$, solution générale de l'équation différentielle sans second membre :

$$\frac{dy(t)}{dt}+0.1y(t)=0.$$

Q11 : Chercher $y_p(t)$, solution particulière constante de l'équation (2).
Q12 : En déduire la forme générale des solutions de l'équation (2).
Q13 : En déduire la forme générale des solutions de l'équation (1), exprimant h en fonction t.
Q14 : Au temps $(t=0)$ (apparition des premières feuilles) la hauteur du plant Tournesol vaut h_0. trouver l'expression de $h(t)$ vérifiant cette condition initiale.
Q15 : Donner l'expression de $h(t)$ si $h_0=8.8$.
Q16 :Une expression possible de $h(t)$ est la suivante : $h(t)=\frac{255}{28.05e^{-0.1t}+1}$. Que vaut $\lim_{t\to+\infty}h(t)$?
Q17 : En exploitant l'expression de $\frac{dh(t)}{dt}$ dans l'équation (1), justifier que $h(t)$ est une fonction croissante du temps.
Q18 : Au bout de combien de temps la plante modélisée atteint-elle la moitié de sa taille finale ? Justifier.

3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$w_n = \frac{1}{u_n - 6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Etablir l'égalité suivante $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{18}$

   (b) Donner la nature et les caractéristiques de la suite (w_n) ainsi que l'expression du terme w_n en fonction de n.

   (c) Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de n.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2
Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ de continuité de la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^3}$$

Etudier son prolongement par continuité en $\mathcal{D}$.

Exercice 3
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

1. Annoncer le théorème des accroissements finis.
2. Montrer que f satisfait ce théorème sur $[0, 2]$.
3. Déterminer toutes les valeurs c de $]0, 2[$ telles que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

Exercice 4

1. Calculer

$$\int \frac{2}{1-t^2} dt.$$

2. En posan $t = \tan\frac{x}{2}$, calculer:

$$I = \int \frac{dx}{\cos(x)}$$

Université Hassan II
Faculté des Sciences et Téchniques
Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours BCG, Semestre 2
Année 2015-2016
08 Juin 2016

Analyse M222
Rattrapage

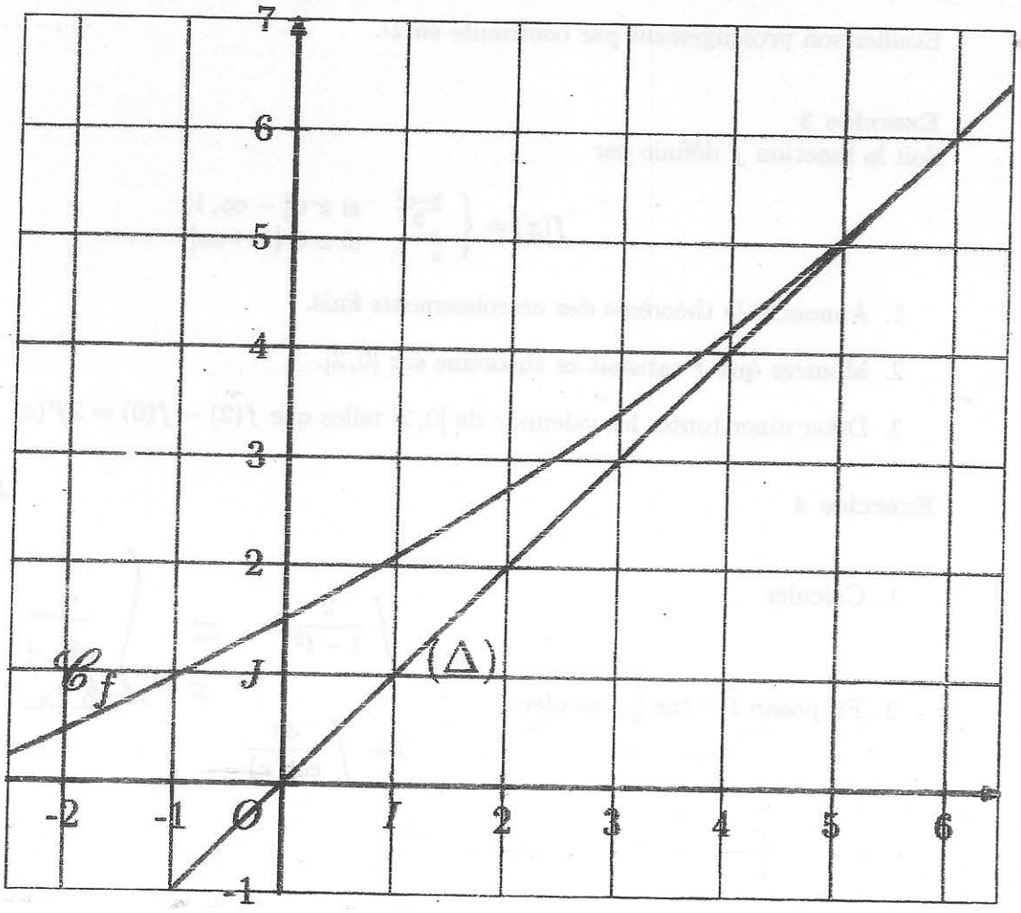
—Durée 1 heure—

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie par

$$f(x) = -\frac{12x + 36}{x - 24}.$$

La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $u_0 = 2$; $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



1. Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite (u_n) .

2. Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n).

Université Hassan II
Faculté des Sciences et Téchniques
Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours BCG, Semestre 2
Année 2015-2016
30 Juin 2016

Analyse M222
Examen

—Durée 2 heures—

Exercice 1

On considére la la fonction définie f par sur $x \mapsto \dfrac{x^2}{2-x^2}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Etudier la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.
3. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x$
5. Résoudre analytiquement l'équation $f(x) = x$

On considére la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2-u_n^2}$.

6. Montrer que, pour $x \in]0,1[$, $0 < f(x) < x < 1$.
7. En déduire que $0 < u_n < 1$ puis que (u_n) est décroissante.
8. La suite (u_n) a-t-elleune limite et si oui laquelle ?

Exercice 2

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{x-\sin(x)}$.
2. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+2}}$. Déterminer l'asymptote en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $\mathcal{E}$ suivante:
$y'' + 2y' + y = 2\exp(-x)$ vérifiant $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$

1. Résoudre l'équation homogéne $\mathcal{E}_H : y'' + 2y' + y = 0$
2. Donner une solution particulière de $\mathcal{E}$ de la forme $y_p(x) = \alpha x^2 \exp(-x)$
3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle $\mathcal{E}$

ANALYSE BCG

2,00

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia

Année 2016-2017
BCG

Examen d'Analyse: Durée 2 heures

Exercice 1

1. *A l'aide du théorème des accroissements finis ($f(x) = \ln(x)$), montrer que*

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < ln(x+1) - lnx < \frac{1}{x}.$$

2. *On définit la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ de nombres réels en posant*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - ln(n),$$

   (a) *Montrer que la suite (u_n) est strictement monotone.*

   (b) *Montrer que $0 \leq \lim u_n < 1$, et en déduire que (u_n) est convergente.*

3. *Soit h la fonction définie par $h(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ pour $x > 1$.*

   (a) *Montrer que $h(x) - 2 = (x-1)(1+\frac{1}{c})^c(\ln(1+c) - \ln(c) - \frac{1}{1+c})$ pour un certain c vérifiant $1 < c < x$.*

   (b) *Montrer que $h(x) \geq 2$.*

Exercice 2

1. *Résoudre l'équation différentielle E_1 : $y'' + y' - 6y = e^x$. Trouver la solution de (E_1) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.*

2. *Calculer les intégrales,*

$$\int_2^4 \frac{3dx}{2x(\ln x)^2} \quad et \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

3. *Calculer les limites suivantes,*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{\ln(x+1)}, \quad \lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x})^x.$$

Exercice 3

1. *Donner un développement limité à l'ordre 2 de*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1 + x + \sqrt{1+x^2}} \quad en\ 0.$$

2. *En déduire l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$.*

3. *Déterminer l'asymptote à la courbe de f en $-\infty$.*

Bon courage

Exercice 4:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$$

1- $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$

2- $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx = \int -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$$= -\ln|x| + \ln(x^2+1) + cte$$

3) (E) : $x(1+x^2)y' + (x^2-1)y = -2$.

l'équation homogène :

3.a) $(1+x^2)y_0' + \left(\frac{x^2-1}{x}\right)y_0 = 0 \iff \frac{dy}{y_0} = -\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$

$$\Rightarrow \ln|y_0| = \ln|x| - \ln(x^2+1) + cte$$

$$\Rightarrow y_0(x) = \lambda e^{\ln(|x|) - \ln(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = \frac{\lambda' x}{1+x^2}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

3.b) Pour appliquer la méthode de la variation de la constante, on pose $y_p(x) = \frac{x\,\lambda(x)}{1+x^2}$ une solution particulière de (E).

On a alors :

$(1+x^2)y_p'(x) + \left(\frac{x^2-1}{x}\right)y_p(x) = -2 \iff \lambda'(x) = \frac{-2}{x}$

on choisit $\lambda(x) = -2\ln(x)$

donc $y_p(x) = \frac{-2x\ln(x)}{1+x^2}$.

3.c) D'après le principe de la superpositions des solutions la solution générale de (E) :

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

$$= \frac{\lambda x}{1+x^2} - \frac{2x\ln(x)}{1+x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

1. $g : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$.

1-a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

$$\boxed{g(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

1-b)

$$f(x) = \exp(g(x))$$

$$= e\, e^{-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

$$= e\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)^3 + o(x^3)\right)$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{48}\right)x^3 + o(x^3)\right)$$

$$\boxed{f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{5e}{8}x^2 - \frac{29e}{48}x^3 + o(x^3)}$$

2) $y = e - \frac{e}{2}x$ est une équation de la tangente à la courbe de f au pt 0.

3) $f(x) - y = \frac{5e}{8}x^2 + o(x^2)$

> 0

(C_f) est au dessus de sa tangente au pt 0.

Exercice 2:

1. Enoncé du Th. A.F.

* $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$
$\Big\}$ f est continue en 1.

3) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} -\frac{1}{x} = -1$
$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} -\frac{1}{2}(x+1) = -1$
$\Big\} \Rightarrow$ f est dérivable en 1.

4) Les fonctions $x \mapsto \frac{3-x^2}{2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $[0,1[$ et $]1,2]$ et f est dérivable en 1
Donc f est dérivable sur $[0,2]$.
Par application du Th. A.F. il existe $c \in]0,2[$ tel que
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c)$ càd $f(2)-f(0) = 2f'(c)$.

5) $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow f(2) - f(0) = -1$

* Si $c \in [0,1]$ alors $f'(c) = -c$
$f(2) - f(0) = 2f'(c) \iff f'(c) = -\frac{1}{2}$
$f'(c) = -c \Rightarrow c = \frac{1}{2} \in [0,1]$.

* Si $c \in]1,2]$ alors $f'(c) = -\frac{1}{c^2}$
$f'(c) = -\frac{1}{2} \iff c^2 = 2$
puisque $c \in]1,2]$ alors $c = \sqrt{2}$.

Examen de rattrapage
Analyse - M222 - BCG
corrigé

Exercice 1 :

$$(U_n)_n : \begin{cases} U_2 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(2 - U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- $U_{n+1} = \frac{1}{2}(2 - U_n) \iff U_n = 2 - 2U_{n+1}$

$U_1 = 2$; $U_0 = -2$

2- $U_2 - U_1 = -2$; $U_1 - U_0 = 4 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas arithm.

$0 = \frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0} = -1 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas géométrique

3- $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - \frac{2}{3}$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}(2 - U_n) - \frac{2}{3}$$
$$= -\frac{1}{2}U_n + \frac{1}{3}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(U_n - \frac{2}{3}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{8}{3}$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = q^n V_0 = -\frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_n + \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{2}{3}$

5) $S_n = -\frac{8}{3} \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{16}{9}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = -\frac{16}{9}$

2. *Calculer une primitive de f: $F(x) = \int f(t)dt$.*

3. *On considère l'équation différentielle suivante:*

$$(E) \quad (1+x^2)y' + \frac{(x^2-1)}{x}y = -2$$

3-a) *Déterminer la solution générale de l'équation homogène associée à (E). (Utiliser la question 2).*

3-b) *En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de (E).*

3-c) *Donner la solution générale de l'équation (E).*

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours BCG
Module M222: Analyse
Année 2018 - 2019
Durée: 1heure30min

Responsables: A.ABASSI, S.CHAIRA, F.MRABET

Examen de rattrapage - Analyse - 28 Mai 2019

Exercice 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par*

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(2 - u_n), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. *Calculer u_1 et u_0.*
2. *Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique ni géométrique.*
3. *On pose $v_n = u_n - \frac{2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.*
4. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*
5. *Calculer $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.*

Exercice 2.

1. *Enoncé le théorème des accroissements finis.*
   Soit f la fonction à variable réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & si \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

2. *Etudier la continuité de la fonction f en 1.*
3. *Etudier la dérivabilité de la fonction f en 1.*
4. *Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.*
5. *Déterminer les valeurs possibles de c.*

Exercice 3. *On considère f la fonction réelle définie par $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$*

1. *Soit g la fonction réelle telle que $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$*

   1-a) *Montrer que le développement limité de g en 0 à l'ordre 3 est le suivant:*

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

   1-b) *Déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.*

2. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.*
3. *Préciser la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.*

Exercice 4. *Soit f la fraction rationnelle suivante: $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$*

1. *Trouver les valeurs de a, b et c tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$*

Exercice 4 (6pts.)

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]-1;1[$ par : $f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1. On a :

   $f'(x) =$ .....

2. Comme $f(0) =$ ..... alors f admet une expression en terme de fonctions usuelles :

   $f(x) =$ .....

Partie B

Sachant que $(\arcsin x)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et que le DL en 0 d'ordre 2 de la fonction $(1+u)^\alpha$ est

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + u^2\varepsilon(u) \quad \varepsilon(u) \xrightarrow[u \longrightarrow 0]{} 0$$

1. Alors le DL en 0 d'ordre 4 de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est :

   $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$ .....

2. D'où le DL en 0 d'ordre 5 de la fonction $\arcsin x$ est :

   $\arcsin x =$ .....

Partie C

1. Une primitive de la fonction arcsin est :

   $\int \arcsin x \ dx =$ .....

2. On a alors :

   $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \ dx =$ .....

Exercice 2 (5pts.)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + n^2 + 2n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n + n^2 + 4n + 4$

1. Calculer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de v_n :

   $v_{n+1} - v_n =$ .....

2. D'où (v_n) est une suite ..... de raison .....
3. Exprimer v_n en fonction de n : $v_n =$ .....
4. En déduire u_n en fonction de n $u_n =$ .....
5. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots u_n$. S_n en fonction de n est :

   $S_n =$ .....

On rappelle que $(\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q})$

Exercice 3 (4pts.)

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 5y' + 6y = 39\sin 3x \qquad (E)$$

1. l'équation sans second membre associée à(E) est

   .....

2. L'équation caractéristique est alors :

   .....

3. La solution générale de l'équation sans second membre est :

   .....

4. (a) La solution particulière de l'équation (E) est de la forme :

   .....

   (b) La solution générale de l'équation (E) est alors :

   .....

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Mohammedia

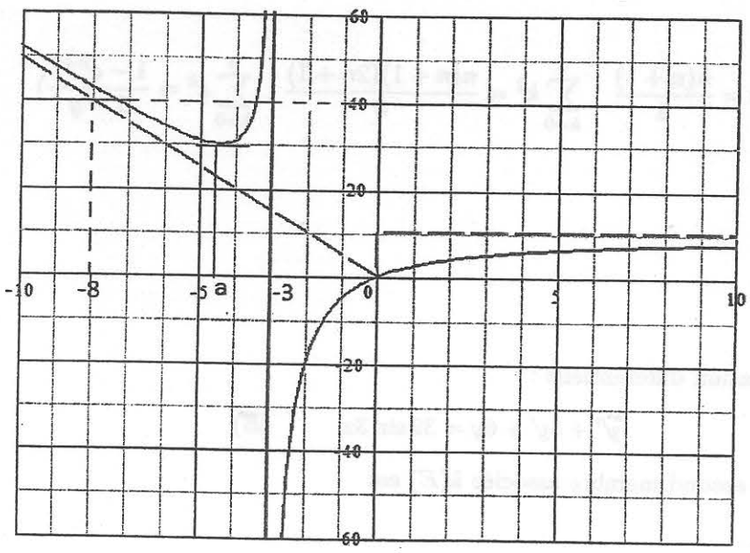
Département de mathématiques
I.Aounil - A.Balayadi - D. Moumida
Mardi 29 Mai 2018

Module M222 Analyse BCG
Épreuve d'examen (2 h)

Nom et Prénom		*N°*

Exercice 1 (5pts.)

On considère une fonction f dérivable sur son domaine de définition et dont la courbe est donnée ci-dessous.



1. $D_f = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$ d'où en $+\infty$ la courbe de f admet une asymptote $\ldots\ldots\ldots\ldots$ d'équation $\ldots\ldots\ldots$
3. $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \ldots\ldots$ d'où la courbe de f admet une asymptote $\ldots\ldots\ldots\ldots$ d'équation $\ldots\ldots\ldots$
4. En $-\infty$ la courbe de f admet une asymptote $\ldots\ldots\ldots\ldots$ d'équation $\ldots\ldots\ldots$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{f(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
6. Le tableau de signe de la fonction dérivée est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		

Ex2 : $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$

1) $f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}$; $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \quad \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2+1-x^2}}$

$= \frac{1}{1+x^2}$

2) Au voisin de 0

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$

3) $DL_6(0)$ de f

$f(x) = \underset{0}{f}(0) + \int_0^x (1 - t^2 + t^4)\, dt + o(x^6)$

$$\boxed{f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^6)}$$

Ex3 $g(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$

1) $\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + cte.$

2) $\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3/2}{x^2+x+1}$

3) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\, dx = \ln\left(\sqrt{x^2+x+1}\right) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + cte.$

6) au voisinage de 0 $\quad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$

$$e^{1+2x} = e\,e^{2x} = e\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)\right)$$

$$= e\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)$$

---

7) Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

---

8)

$$\int x\sin(x)\,dx = \left[-x\cos(x)\right] + \int \cos(x)\,dx$$

$$= \left[-x\cos(x) + \sin(x)\right]$$

---

9) $xy' + (1+x)y = 0 \iff^{x\neq 0} y(x) = \lambda_1 e^{-\int \frac{1+x}{x}\,dx}$

$$= \lambda_1 e^{-\ln|x| - x}$$

$$y(x) = \frac{\lambda e^{-x}}{x}$$

---

10) $g(x) = x^2 - 3x$

$g'(x) = 2x - 3$

$g''(x) = 2.$

$$g''(x) + g'(x) = 2x - 1$$



Corrigé du partiel - Analyse - BCG

21 Mai 2019

Ex 1

1- $1+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{4}+4+\frac{1}{8}+8+\cdots+\frac{1}{2^n}+2^n = \left(1+2+4+8+\cdots+2^n\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$$= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{n+1} - 1 + 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$= 2^{n+1} - \frac{1}{2^n}$$

2- On a

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0$$

(u_n) est croissante majorée par v_0 donc convergente

(v_n) est décroissante minorée par u_0 donc convergente.

3- $f(x) = x^3 - x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	$+\infty$

f admet un maximum local en 0.

4- $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} (-x)\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\to 0} = 0$$

($-x \to 0$)

Donc $f'(0) = 0$

5- f est continue et est strictement croissante sur $[0,1]$ elle établit donc une bijection de $[0,1]$ dans $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$.

Exercice 2. *On considère f la fonction de la variable réelle x définie par:* $f(x) = arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$

1. *Montrer que* $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

.....

.....

.....

2. *Déterminer le développement limité de f' en 0 à l'ordre 5.*

.....

.....

.....

3. *Déduire le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 6.*

.....

.....

.....

On pourra utiliser sans démonstration le développement limité en 0 de la fonction suivante:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + ... + (-1)^n t^n + o(t^n)$$

Exercice 3. *Soit g la fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ par* $g(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$

1. *Montrer que la fonction* $H : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})$ *est une primitive de la fraction rationnelle* $h : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$.

.....

.....

.....

2. *Trouver les réels a, b, α et β tels que*

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \alpha \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{\beta}{x^2+x+1}$$

.....

.....

.....

3. *Déduire une primitive de la fraction rationnelle g.*

.....

.....

.....

5. *Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $[0,1]$, alors*

☐ *f^{-1} est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.*
☐ *La courbe de f^{-1} est symétrique à celle de f par rapport à l'axe des abscisses.*
☐ *Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = y$ alors $f(y) = x$.*
☐ *f est une bijection de $[0,1]$ vers $[f(0), f(1)]$.*
Explication.....

.....

6. *Au voisinage de 0*

☐ $\sin(2x) = 2x + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$
☐ $e^{1+2x} = e(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3))$
☐ $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$
☐ $\sqrt{1+2x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

Explication.....

.....

7. *Au voisinage de $+\infty$*

☐ $\frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$
☐ $\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$
☐ $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})$
☐ $\frac{1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

Explication.....

.....

8. *Une primitive de la fonction $x \mapsto x\sin(x)$ est*

☐ $x \mapsto x\cos(x) + \sin(x)$
☐ $x \mapsto -x\cos(x) + \sin(x)$
☐ $x \mapsto -x\cos(x)$
☐ $x \mapsto x\cos(x)$

Explication.....

.....

9. *La solution générale de l'équation différentielle suivante: $xy' + (1+x)y = 0$ est*

☐ $x \mapsto \lambda x e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}$
☐ $x \mapsto \lambda \frac{e^{-x}}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}$
☐ $x \mapsto \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}$
☐ $x \mapsto \lambda \frac{e^{-x}}{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}$

Explication.....

.....

10. *La fonction $g : x \mapsto x^2 - 3x$ est une solution particulière de l'équation différentielle*

☐ $y'' - y' + 2y = x$
☐ $y'' = 2x - 1$
☐ $y'' + y' = 2x - 1$
☐ $y'' + y = 2x - 1$

Explication.....

.....

6.ce1.

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours BCG
Module M222: Analyse
Année 2018 - 2019
Durée: 1heure45min

Responsables: A.ABASSI, S.CHAIRA, F.MRABET

Partiel Analyse - 21 Mai 2019

Nom et Prénom.....

Exercice 1. *Les questions suivantes sont indépendantes. Pour chaque question 4 affirmations sont proposées parmi lesquelles 1 seule est vraie. Pour chaque question, cochez puis expliquez la réponse que vous pensez vraie:*

1. *Sachant que* $1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, *la somme* $1+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{4}+4+\frac{1}{8}+8+...+\frac{1}{2^n}+2^n$ *est égale à*

   ☐ $2^n - \frac{1}{2^n}$
   ☐ $2^n - \frac{1}{2^{n+1}}$
   ☐ $2^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}$
   ☐ $2^{n+1} - \frac{1}{2^n}$

   Explication.....

   .....

2. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles vérifiant:* $u_0 = a$, $v_0 = b$ *avec* $a < b$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ *et* $v_{n+1} \leq v_n$. *Alors* (u_n) *et* (v_n) *sont*

   ☐ *adjacentes*
   ☐ *convergentes*
   ☐ *divergentes*
   ☐ *non bornées*

   Explication.....

   .....

3. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^3 - x^2$. *Alors*

   ☐ f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$
   ☐ f *présente un minimum global sur* $\mathbb{R}$
   ☐ f *présente un maximum local en* 0
   ☐ $f(x) = 0$ *admet trois solutions sur* $\mathbb{R}$

   Explication.....

   .....

4. *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$.

   ☐ *la dérivée de* f *est nulle en* 0
   ☐ f *n'est pas dérivable en* 0
   ☐ *la dérivée de* f *en* $x \neq 0$ *est* $-2xe^{-\frac{1}{x^2}}$
   ☐ *le graphe de* f *admet une tangente vertical en* 0

   Explication.....

   .....